UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERÍA
Facultad de Ingeniería Económica, Estadística y CCSS.

EXAMEN PARCIAL
CÁLCULO DIFERENCIAL

Fecha: 18 de octubre de 2024

Hora: 16:00 a 18:00

Profesores del curso:

Jabo Bereche Fabiola	Rodríguez Baca Víctor	Chung Ching Alejandro	Vargas Trujillo Carlos	Pino Romero Neisser

NOTA:

CLAVE: _____

Indicaciones:

- No está permitido el uso de calculadoras, ni de ningún dispositivo electrónico durante el examen.
- El examen se desarrolla sin apuntes, ni libros.
- La pregunta 6 puede resolverse en **reemplazo** de alguna de las preguntas 1 a 5.
- No resuelva las 6 preguntas, de hacerlo solo se calificará las 5 primeras preguntas.

Pregunta 1 **(4 puntos)**

Dada la función

$$f(x)=\begin{cases} 2\arctan(x+1)\,, & x\leq -2 \\ Sgn(\ln(x+2))\,, & -2<x\leq 0 \\ 1+\sqrt{x^2-1}, & x>1 \end{cases}$$

a) (2 puntos) Determine las asíntotas verticales, horizontales y oblicuas de $y=f(x)$, si es que las hubiere.
b) (2 puntos) Grafique la función $y=f(x)$ en el plano xy.

Pregunta 2 **(4 puntos)**

Considere la función:

$$f(x)=\begin{cases} b[\![3x+4]\!], & x\in[-2,2[\\ 3x\sqrt{a-2x}, & x\in]2,4[\\ 18, & x=2 \end{cases}$$

a) (3 puntos) Determine el valor de $K=3a+2b$, si la función es continua en todo su dominio.
b) (1 punto) ¿Tiene asíntotas horizontales? Justifique adecuadamente.

Pregunta 3 **(4 puntos)**

Sea $f\colon R\to R$ una función continua en $x=1$ tal que $f(1)=0$ y

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=5$$

a) Calcule $M=\lim_{h\to 0}\left[\frac{f(1+h)-f(1)}{h}\right]$
b) El límite M calculado en el acápite anterior representa la pendiente de la recta, L, que es tangente a la gráfica de $y=f(x)$ en el punto $x=1$. Determine la ecuación de la recta L.

Pregunta 4 **(4 puntos)**

Una compañía constructora desea invertir en un área rural donde se ha determinado que la población dentro de t años será de $P(t)$ miles de habitantes. Se sabe que la función P es continua en $t = 1$ y está definida por

$$P(t) = \begin{cases} \dfrac{t^2+4t-5}{t-1} & , \quad 0 \le t < 1, \\ a & , \quad t = 1, \\ t + b - \sqrt{t^2+t+7} & , \quad t > 1. \end{cases}$$

Además, se ha estimado que para recuperar la inversión de la compañía se requiere que la población sea de por los menos 8 000 habitantes en algún momento.

- (2 puntos) Calcule las constantes a y b.
- (2 puntos) ¿Podrá la compañía constructora recuperar su inversión?. Justifique su respuesta.

Pregunta 5 **(4 puntos)**

a) **(2.0 Puntos):** Demuestre que una función $f: R \to R$ continua en $x_0 = 0$ que satisface $f(x+y) = f(x)f(y)$: $\forall x, y \in R$ es continua en todo su dominio.

b) **(2.0 Puntos):** Halle, si existe, $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\cos\sqrt{x+1} - \cos\sqrt{x} \right)$.

Opcional

Pregunta 6 **(4 puntos)**

La curva $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{b}$, con $b > 0$, representa una curva $y = f(x)$ en el plano xy. Las intersecciones con los ejes coordenados, de cualquier recta tangente a la curva $y = f(x)$, están dadas por los puntos $P(0, \delta)$ y $Q(\sigma, 0)$. Pruebe que $\delta + \sigma = b$.